Date

# 1993年　東大数学　文系第2問　理系第2問

(文系)

$a_1 = 1$
$a_2 = 3$
$a_3 = 3\times3 - 7\times1 = 2$ ◀偶数
$a_4 = 3\times2 - 7\times3 = -15$ ◀5の倍数
$a_5 = 3\times(-15) - 7\times2 = -59$
$a_6 = 3\times(-59) - 7\times(-15) = -72$ ◀偶数

$a_3, a_6$が偶数なので、
nが3の倍数のときに、$a_n$が偶数になると予想

← 答案に書かず、計算用紙に計算して、予想すればよい。(答案に書いても良い)

以下、2を法とする合同式を立てる。(mod 2)

$$\begin{aligned} a_{n+3} &\equiv 3a_{n+2} - 7a_{n+1} \quad -2a_{n+2}+6a_{n+1} \\ &\equiv a_{n+2} - a_{n+1} \quad \text{漸化式を代入} \\ &\equiv 3a_{n+1} - 7a_n - a_{n+1} \\ &\equiv 2a_{n+1} - 7a_n \quad -2a_{n+1}+8a_n \\ &\equiv a_n \end{aligned}$$

$\therefore a_{n+3} \equiv a_n \pmod 2$

nが3の倍数のときに$a_n$が偶数になる、つまり周期が3だと予想したので、$a_{n+3}$と$a_n$の関係を探る。

これは、周期が3で、$a_n$の偶奇が決まっていることを表している。

$a_3 = 3a_2 - 7a_1$
$= 3\times3 - 7\times1 = 2$ なので

nがすべての3の倍数のとき、$a_n$は偶数となる。

(注) 問題文に「整数からなる数列$\{a_n\}$」とあるので、$\{a_n\}$が整数である証明は不要。問題文になければ、必要

(理系(1))

問題文に書いてるので、予想を立てる必要ない。いきなり$a_{n+3}$と$a_n$の関係を作る。

以下、2を法とする合同式を立てる。

$$\begin{aligned} a_{n+3} &\equiv 3a_{n+2} - 7a_{n+1} \quad -2a_{n+2}+6a_{n+1} \\ &\equiv a_{n+2} - a_{n+1} \quad \text{漸化式を代入} \\ &\equiv 3a_{n+1} - 7a_n - a_{n+1} \\ &\equiv 2a_{n+1} - 7a_n \quad -2a_n+8a_n \\ &\equiv a_n \end{aligned}$$

よって$a_n$の偶奇は、周期が3で一致する。

$a_3 = 3a_2 - 7a_1 = 3\times3 - 7\times1 = 2$ で偶数。
以上より、nが3の倍数であることと、$a_n$が偶数であることは、同値である。

(理系(2))

$a_n$が偶数 ⇔ nが3の倍数 を示したので、$a_n$が5の倍数になる条件を求めればよい。

答案に書かなくてよい

$a_4$が5の倍数であることは示してある。
→ 次の5の倍数を探す。
$a_7 = 3\times(-72) - 7\times(-59) = 197$
$a_8 = 3\times197 - 7\times(-72) = 1095$
$a_4, a_8$が5の倍数なので、nが4の倍数が条件だと予想

5を法とする合同式を考えると、

$$\begin{aligned} a_{n+4} &\equiv 3a_{n+3} - 7a_{n+2} \quad +5a_{n+2} \\ &\equiv 3a_{n+3} - 2a_{n+2} \quad \text{漸化式を代入} \\ &\equiv 3(3a_{n+2} - 7a_{n+1}) - 2a_{n+2} \\ &\equiv 7a_{n+2} - 21a_{n+1} \quad -5a_{n+2}+20a_{n+1} \\ &\equiv 2a_{n+2} - a_{n+1} \quad \text{漸化式を代入} \\ &\equiv 2(3a_{n+1} - 7a_n) - a_{n+1} \\ &\equiv 5a_{n+1} - 14a_n \quad -5a_{n+1}+15a_n \\ &\equiv a_n \end{aligned}$$

よって、周期4で5の倍数がくり返し、$a_4 = -15$なので「nが4の倍数」と「$a_n$が5の倍数」が同値。

$a_n$が10の倍数になる条件は、nが3の倍数かつnが4の倍数
つまりnが12の倍数である。 (注)